Jacobien des fonctions symétriques élémentaires

www.h-k.fr/publications/objectif-agregation

Cette note présente une méthode purement différentielle de calcul du jacobien des fonctions symétriques élémentaires :

$$\mathrm{J} = \det\left(\frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathrm{X}_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$$

où

$$\Sigma_i = \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant n} \mathrm{X}_{j_1}\cdots\mathrm{X}_{j_i} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]\,.$$

Trois autres méthodes (d'ordre algébriques) sont présentées dans

http://ens.univ-rennes1.fr/agreg-maths/documentation/docs/jacobsym.pdf

Ce calcul est intéressant pour l'étude de la régularité des « fonctions-racines d'un polynôme » et assure que « tout se passe bien » lorsque les racines sont simples (voir [BPM, application 1.26] et [ROU2, Exercice 62]).

Comme un polynôme à n indéterminées qui s'annule sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ est nul, il suffit de trouver une expression polynomiale de $\mathrm{J}(x_1,\ldots,x_n)$ valable sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On pourra consulter à ce propos le lemme 10 de la note « Sur le corps des complexes, tout est connexe » disponible sur

http://objagr.gforge.inria.fr/documents/

Introduisons quelques notations. On note $\mathscr{B} = (1,\ldots,\mathrm{X}^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit aussi l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-x_i) - \mathrm{X}^n\,. \end{cases}$$

Lorsqu'on lit φ dans la base $\mathscr{B}$, on remarque que

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \left((-1)^n\Sigma_n(x_1,\ldots,x_n), (-1)^{n-1}\Sigma_{n-1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,-\Sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Fixons $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. La matrice de $\mathrm{d}\varphi_{(x_1,\ldots,x_n)}$ dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ correspond à la matrice jacobienne des fonctions symétriques élémentaires à des signes et à des permutations de lignes près. On en déduit, plus précisément, que

$$\mathrm{J}(x_1,\ldots,x_n) = (-1)^n \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{d}\varphi_{(x_1,\ldots,x_n)})\,. \qquad (\mathbf{1})$$

On est donc ramené à calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{d}\varphi_{(x_1,\ldots,x_n)})$. L'application φ se prête particulièrement bien au calcul des dérivées partielles

$$\begin{aligned}\partial_i\varphi(x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{t\to0}\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_i+t,\ldots,x_n)-\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{t}\\ &= \lim_{t\to0}\prod_{j\neq i}(\mathrm{X}-x_j)\frac{\mathrm{X}-(x_i+t)-(\mathrm{X}-x_i)}{t}\\ &= -\prod_{j\neq i}(\mathrm{X}-x_j)\,.\end{aligned}$$

On suppose à présent que $x=(x_1,\ldots,x_n)$ vérifie que les x_i sont n réels distincts (autrement dit, $x_i\neq x_j$ si $i\neq j$) et on note

$$\mathrm{P}_i = \prod_{j\neq i}(\mathrm{X}-x_j)\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\,.$$

L'interpolation de Lagrange (voir [CM, Théorème 1.1]) indique que la famille $(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ notée $\mathscr{B}_x$. D'après le calcul des dérivées partielles, la matrice de $\mathrm{d}\varphi_{(x_1,\ldots,x_n)}$ dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}_x$ est $-\mathrm{I}_n$. La matrice de $\mathrm{d}\varphi_{(x_1,\ldots,x_n)}$ dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ est donc l'opposée de la matrice de passage Q de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_x$. Ainsi, d'après (**1**), on a $\mathrm{J}(x_1,\ldots,x_n)=\det\mathrm{Q}$.

Pour calculer $\det\mathrm{Q}$, on va exprimer Q^{-1} la matrice de passage de $\mathscr{B}_x$ à $\mathscr{B}$ (à propos des matrices de passage, on pourra consulter [PAU, Chapitre 1]). Pour cela, il s'agit d'exprimer, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, les composantes de X^i dans la base $\mathscr{B}_x=(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n)$. Or, si on note $(f_1,\ldots,f_n)$ la base duale de $\mathscr{B}_x$, la décomposition de $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ dans $\mathscr{B}_x$ est donnée (comme pour tout couple « base-base duale ») par

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathrm{P})\mathrm{P}_i\,.$$

Or ici, toujours par l'interpolation de Lagrange, les formes linéaires f_i sont données par

$$f_i \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \left(\prod_{j\neq i} (x_i - x_j) \right)^{-1} \mathrm{P}(x_i)\,. \end{array} \right.$$

On en déduit alors que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathrm{P})\mathrm{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j\neq i} (x_i - x_j) \right)^{-1} \mathrm{P}(x_i)\ \mathrm{P}_i\,.$$

En particulier, en appliquant cette égalité à chacun des vecteurs de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, on en déduit que la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_x = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ à la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$\mathrm{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \prod_{j\neq 1} (x_1 - x_j) & & & \\ & \prod_{j\neq 2} (x_2 - x_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{j\neq n} (x_n - x_j) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est, d'après Vandermonde,

$$\det \mathrm{Q}^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} (x_i - x_j) \right)^{-1} \prod_{\{(i,j),\ j>i\}} (x_j - x_i) = \left(\prod_{\{(i,j),\ j<i\}} (x_j - x_i) \right)^{-1}.$$

On en déduit que
$$\mathrm{J}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\{(i,j),\ j<i\}} (x_j - x_i)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette condition étant un ouvert, on peut conclure :

$$\mathrm{J} = \det \left(\frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathrm{X}_j} \right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \prod_{\{(i,j),\ j<i\}} (\mathrm{X}_j - \mathrm{X}_i)\,.$$

Références

[BPM] V. Beck, J. Malick, et G.Peyré. *Objectif Agrégation.* H & K, 2004.

[CM] M. Crouzeix et A. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1984.

[PAU] A. Paugam. *Questions délicates en algèbre et géométrie.* Dunod, 2007.

[ROU2] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, , deuxième édition.* Cassini, 2003.